**第2节 函数值不等式的解法**

**内容提要**

题干给出函数的解析式或满足的一些性质，让我们去求解像这样的不等式，这是本节要研究的题型，这类题有两个常用解法：

1．画草图，由图解不等式；

2．利用函数的单调性，转化为自变量的不等式来解.

接下来我们通过一系列的例题及变式，逐步给同学们分析这类问题可能的演变方向是怎样的，解题时需要注意哪些方面.

**典型例题**

【例题】函数是定义在**R**上的增函数，若，则实数*x*的取值范围为 .

答案：

解析：本题没有任何陷阱，直接利用单调性将转化为自变量的不等式求解即可，

因为在**R**上，所以，解得：.

【变式1】定义在上的函数满足，且，则实数*x*的取值范围为（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：C

解析：和上一题相比，有了定义域的限制，则必须增加考虑*x*和满足定义域的要求，

由题意，在上，所以等价于，解得：.

【变式2】已知函数，若，则实数*x*的取值范围为（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：A

解析：本题没有直接给单调性，而是给的解析式，若将和代入解析式，则讨论的情况较多，所以先判断单调性，用单调性来解不等式是较好的做法，

易得在上，在上，和都，所以也，

在间断点处，左侧函数值，右侧极限值，

所以的大致图象如图，由图可知在**R**上，所以.



【反思】无论题干是否给出解析式，在求解与有关的函数值不等式时，都应首先考虑单调性，这是比较优越的解法.

【变式3】函数是定义在**R**上的偶函数，且在上单调递增，若，则实数*x*的取值范围为（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：A

解析：*x*和不一定在上，可根据偶函数满足，将它们化到上来，

因为是偶函数，所以，（这个不等式也可以理解成立*y*轴越远的自变量，对应的函数值越大，如图）

又在上，所以，故，解得：.



【反思】偶函数有关的函数值不等式中，常根据，在自变量上加绝对值，将自变量全部化到上进行考虑.

【变式4】设，则使成立的*x*的取值范围是（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：A

解析：是定义在**R**上的偶函数，（此处一定要看出是偶函数）

接下来判断*y*轴右侧的单调性，要求导吗？求导较为麻烦，此处拆分分析比较方便，

当时，，而和都，所以在上，

从而，故.

【变式5】已知函数，若，则实数*x*的取值范围为 .

答案：

解析：本题仍可先判断的单调性，但此处函数较为复杂，需求导判断，

由题意，，所以在**R**上，

从而等价于，解得：.

【变式6】已知函数，若，则实数*x*的取值范围为 .

答案：

解析：，右侧有个负号，怎么办呢？

观察发现为奇函数，所以负号可以拿到括号里面，下面先证明为奇函数，

由题意，，

所以是奇函数，从而，

因为，所以在**R**上，

故等价于，解得：.

【反思】当我们看到这种结构的函数值不等式时，一定要看看是否为奇函数，若是，则可以移项结合奇函数转化为这种结构，再借助单调性来求解.

**强化训练**

1．（2017·新课标Ⅰ卷·★★）奇函数在**R**上单调递减，若，则满足的*x*的取值范围是（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：D

解析：为了利用单调性解不等式，先把原不等式中的和1也化成的某个函数值，

因为为奇函数且，所以，从而即为，

结合在**R**上可得，故.

2．（2022·贵阳模拟·★★）定义在上的函数满足，，都有，且，则实数*a*的取值范围为 .

答案：

解析：由题意，是定义在上的减函数，所以，解得：.

3．（2022·湖北五校联考·★★★）已知函数，若，则实数*x*的取值范围为 .

答案：

解析：由题意，的大致图象如图所示，由图可知在**R**上，

所以，从而，将看成，移项分解因式，

故，因为，所以，解得：.



4．（2021·德阳期末·★★★）已知偶函数在上单调递减，则满足的*x*的取值范围是 .

答案：

解析：因为为偶函数，所以，

又在上，所以，解得：或.

5．（★★★）设函数，则使得成立的*x*的取值范围是 .

答案：

解析：此处给了一个较为复杂的解析式，应该从研究的性质入手，先求函数的定义域，

分子应满足，故，此时分母可化为，所以，

从而的定义域为，且，（研究出定义域，解析式也简化了）

，所以函数的草图如图，

显然为偶函数，且在上，所以，

从而或，解得：或.



6．（★★★）定义在**R**上的函数在上单调递增，且是偶函数，则的解集是 .

答案：

解析：是偶函数的图象关于*y*轴对称，

而的图象可由的图象向左平移2个单位得到，所以的图象关于直线对称，

因为在上，所以的草图如图所示，

由图可知的图象上离对称轴越远的点，其函数值越大，可将和的大小关系翻译成自变量和*x*离的远近，从而等价于，解得：.



7．（2022·广东模拟·★★★）若定义在**R**上的奇函数在上单调递减，且，则满足的*x*的取值范围为（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：D

解析：不等式左侧是两项之积，可讨论*x*的正负，并将其约掉，化简后再解，

由题意，函数的大致图象如图所示，显然是不等式的解；

当时，或，解得：或，故；

当时，或，解得：或，故；

综上所述，满足的*x*的取值范围为.



8．（2021·烟台模拟·★★★）已知函数，若，则*x*的取值范围为（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：D

解析：为奇函数，在**R**上，

而，

所以即为，也即，从而，故.

9．（★★★）（多选）已知函数，实数*m*、*n*满足不等式，则（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：AC

解析：为奇函数，

是**R**上的增函数，

所以，

又是增函数，所以等价于，故，

A项，由知，所以，故A项正确；

B项，，由本题的条件可判断出，

但*m*和的符号无法判断，所以不一定成立，故B项错误；

C项，，故C项正确；

D项，取，，显然满足，此时，故D项错误.

10．（★★★★）已知函数，则不等式的解集是（ ）

（A） （B） （C） （D）

答案：B

解析：看到这种结构，猜想为奇函数，移项后才能将负号拿到括号里面，利用单调性求解，所给函数解析式较复杂，可拆成和分别研究奇偶性和单调性，

设，，则，

显然，所以为奇函数，在**R**上，

又，所以为奇函数，

在上，显然随着*x*的增大而增大，所以在上，

结合奇函数图象的对称性知在**R**上，从而是奇函数且在**R**上，

故，解得：.

【反思】①函数是定义在**R**上的奇函数，熟悉这一结论对解题有帮助；②奇函数若在上，则它必定在**R**上.